UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM HABILITAÇÃO LICENCIATURA MATEMÁTICA

O CONCEITO DE ÁREA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Orientanda **Francielle Goedert Hammes**
Orientadora **Neri Terezinha Both Carvalho**

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força nas horas em que pensei em desistir e pela companhia nas longas madrugadas de estudo e leitura em busca da melhor idéia.

À professora Neri Terezinha Both Carvalho, minha orientadora, pela paciência, dedicação e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, José e Isaura, minhas irmãs Daniela e Eliane, meu esposo Fabiano, que se faziam presentes e amigos, incentivando-me e apoiando-me. A vocês meu eterno carinho e gratidão.

A todos os colegas e amigos, de perto e também de longe, vocês foram essenciais nesta luta. Foram cinco anos de estudo e dedicação, anos que pude contar com pessoas especiais que fizeram com que eu não desistisse no meio do caminho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..1
CAPÍTULO I - A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA...3
1.1. O conceito de área: breve histórico...3
1.2. Pesquisa feita por Ana Chiummo sobre O Conceito de Áreas de Figuras Planas: Capacitação Para Professores do Ensino Fundamental...............................10
1.3. O conceito de área no saber Matemático...15
1.4. O conceito de área no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e o Planejamento de Escolas...22
1.5. Conclusão...27
CAPÍTULO II - ESTUDOS DOS LIVROS DIDÁTICOS..29
1.1. Análise do livro “Matemática Para Todos”...29
1.2. Análise do livro Matemática “Hoje é Feita Assim”..............................44
1.3. Conclusão...50
CAPÍTULO III – UMA SONDAGEM..52
1.1. Questionário Aplicado...52
1.2.Análise a priori...53
1.3 Análise Posteriore...56
CONCLUSÃO 60

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como finalidade analisar o conceito de área no Ensino Fundamental, bem como verificar os problemas relativos ao ensino-aprendizado de Geometria pelos alunos de 5^a a 8^a séries. Pretende ainda contribuir na formação de um profissional crítico, participativo e competente, para atuar em sala de aula, proporcionando-lhe condições para não ser mais um professor executor de tarefas, procedimentos e técnicas estabelecidas por especialista.

Sabemos que a maioria dos professores de Matemática, apoiada nos livros didática, introduz o conceito de área como um número associado a uma superfície e, rapidamente, passa ao cálculo de área utilizando fórmulas.

Para apresentar este estudo o trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos um breve estudo histórico do conceito de área. Em seguida, como é o conceito de área no saber matemático, verificando assim a sua evolução e quais foram os obstáculos didáticos deste conceito. Analisamos a tese de mestrado de Chiummo (1998), verificando sua fundamentação teórica, metodologia, sendo que o objetivo de sua problemática na pesquisa, era de que ao ensinar o conceito de área, muitos professores não fazem o jogo de quadros de maneira adequada, e os obstáculos didáticos não são levados em consideração fazendo com que os alunos não participem da construção do conceito de área. Chiummo levantou cinco hipóteses, cuja validação foi verificada através do questionário aplicado no decorrer do trabalho e da seqüência didática.

Neste primeiro capítulo, também desenvolvemos um estudo do conceito de área, ou seja, investigamos como o conjunto das adaptações e transformações que o conceito de área sofre para ser ensinado. Por esse motivo estudamos os Parâmetros Curriculares

Nacionais, a Proposta de Ensino de Santa Catarina, os planejamentos anuais das escolas, enfocando o processo ensino-aprendizagem e as concepções dos professores.

No segundo capítulo analisamos os seguintes livros didáticos: “Matemática Para Todos” de Imenes & Lellis e “Matemática Hoje é Feita Assim” de Antônio José Lopes Bigode.

No terceiro capítulo, fizemos uma investigação com alunos da Universidade Federal de Santa Catarina, através de um questionário, verificando o método trabalhado para ensinar o conceito de área. Se foi de forma mecanizada ou de forma de ladrilhamentos, composição e decomposição de figuras planas.

O objetivo deste trabalho é o de conhecer um pouco da história do conceito de área, as proposições dos livros didáticos e como os alunos da licenciatura tem conhecimento e de que maneira é ensinado o conceito de área.

CAPÍTULO I – A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA

Neste capítulo, apresentamos um breve estudo histórico do conceito de área, baseado nos trabalhos de Baltar, Chiummo e do livro “Elementos” de Euclides. E com isto identificamos o que sugere para ser ensinado sobre o conceito de área utilizando documentos oficiais no âmbito nacional e estadual, Parâmetro Curricular Nacional (1998), a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998) e os Planejamentos anuais das escolas.

1.1. O conceito de área: breve histórico

Há indícios históricos de que ocorreram sociedades avançadas, que se instalaram ao longo dos rios Nilo, no Egito, Tigre e Eufrates. Na mesopotâmia, Indo e Ganges, na região centro-sul da Ásia e Hoang-Ho e Yang Tse-Kiang, na Ásia Oriental. Essas sociedades conhecidas por suas habilidades em engenharia na drenagem de pântanos e irrigação, construíram obras de defesa contra inundações, grandes edifícios e estruturas por meio de projetos que requerem muita geometria prática.

A origem da geometria que quer dizer “medida da terra” foi atribuída pelo historiador grego Heródoto (séc. V a.C.).

Heródoto escreveu que a necessidade da medida originou-se da ocorrência de várias inundações ao longo do rio Nilo. As terras cultivadas pelos agricultores (proprietários) sofriam inundações a cada cheia. Os agricultores as demarcavam com cordas (cordas eram usadas tanto para traçar base de templos, como para demarcar terras). Os conhecimentos dos “estiradores de corda” egípcios eram bastante valorizado por Demócrito, um matemático de competência e um dos fundadores da teoria atômica, devido à precisão admirável das construções das pirâmides. Os agricultores pagavam impostos ao rei, portanto, ao término de cada cheia era necessário pedir a redução do imposto, proporcional à quantidade da terra perdida pela ocupação das águas.

Já Aristóteles (384 – 322 a.C.) atribuía à classe sacerdotal a origem da geometria, mas não partindo da premissa da necessidade de demarcações de terras e sim de puro lazer. Portanto temos aqui duas versões da origem da geometria.

Numerosos exemplos concretos mostram que os babilônios do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de área de retângulos, de triângulos retângulos e isósceles (e talvez de um triângulo qualquer), de trapézio retângulo e do volume do paralelepípedo retângulo.

Pesquisadores ratificam ser também datados dessa época o primeiro documento da história como livros sagrados e papiros. Os Papiros Egípcios são documentos muito valiosos, pois contém as informações sobre a geometria preservada até hoje. Sendo um dos mais precisos o Papyrus Rhind, copiado em 1650 a.C., por um escriba chamado Ahmes (XVII a.C.).

O porquê do nome Rhind:

Rhind, A.H. (1833-1863) era um advogado escocês que foi para o Egito por questões de saúde e interessou-se por egiptologia, adquiriu várias relíquias, entre elas, foi este papiro. O Papyrus de Rhind consiste de 87 exercícios com suas respectivas soluções.

Estudos realizados nesses papiros constataram que os egípcios e os mesopotâmicos construíram os primeiros templos de projeções cuneiformes e precisas. Adotaram formas geométricas; logo, já resolviam problemas de Geometria.

BOYER (1974, p. 13), explicita que existe no Papiro Rhind problemas geométricos. O Prob. 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos de base hoje, e multiplicando isso pela altura. Ahmes justificava o seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo. Conforme figura 1.

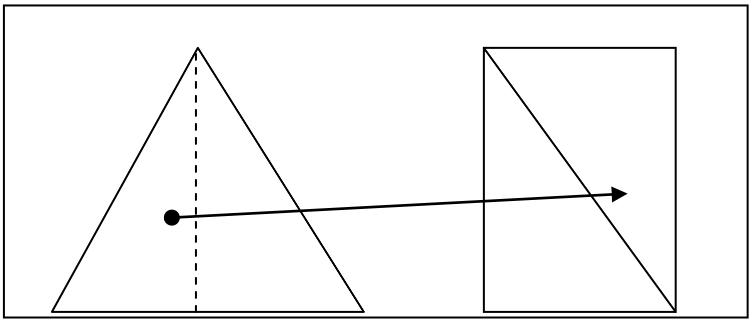


FIGURA 1. DECOMPOSIÇÃO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES, E COMPOSIÇÃO DO RETÂNGULO

Dessa mesma forma no Pro. 52, mostra que o trapézio isósceles também pode ser decomposto (Figura 2). Nesse problema a medida da área do trapézio é obtida multiplicando a base pela a altura.

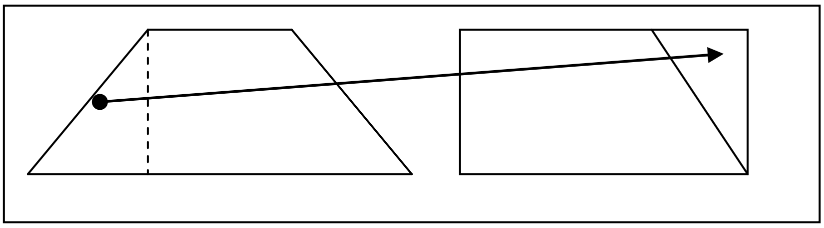


FIGURA 2 - DECOMPOSIÇÃO DO TRAPÉ ZIO E COMPOSIÇÃO DO RETÂNGULO

O geômetro grego Euclides, autor de Os Elementos, viveu no período de 330 a.C. à 275 a.C., aproximadamente. Sua obra reúne de modo sistematizado as principais descobertas geométricas de seus precursores sobre os elementos sistemáticos. Os Elementos foram publicados em diversas línguas chegando-se a mais de um milhar de edições. Ainda hoje recorremos aos elementos para saber como nasceram as idéias, quando percebemos certas impropriedades no tratamento de determinados tópicos da Geometria.

Euclides não define área. Em sua obra Os Elementos, duas figuras são chamadas “iguais” quando tem a mesma magnitude, isto é, os mesmos comprimentos se são segmentos e a mesma área se são figuras planas, o mesmo volume se são sólidos, ou a mesma abertura se são ângulos.

Dedicando-se ao ensino da Matemática, Euclides atraiu um grande número de discípulos propagando-se assim suas idéias. Entre essas idéias, Euclides discutiu que a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. Em outras palavras, duas figuras que se coincidem por superposição são iguais (congruentes).

No livro V de Os Elementos, Euclides trabalha com a teoria das proporções e mostra as relações existentes tanto para figuras planas quanto para sólidos.

Um Axioma citado no livro Os Elementos diz: “Duas figuras que coincidem por superposição são iguais”. Vamos ver algumas proposições de Euclides que permite ter a noção de área, sem cálculos:

- **PROPOSIÇÃO XXXV TEOREMA do livro I**: _ "Os paralelogramos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais”;
- **PROPOSIÇÃO XXXVII TEOREMA do livro I**: _ "Os triângulos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais".

Apresentemos a demonstração de Euclides em uma de suas proposições:

PROPOSIÇÃO XL TEOREMA do livro I: “Os triângulos iguais postos sobre bases iguais e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas”. O significado da palavra “iguais” é de que figuras em questão têm a mesma área. E a demonstração se faz por meio de decomposição em figuras congruentes. **(FIG.3)**

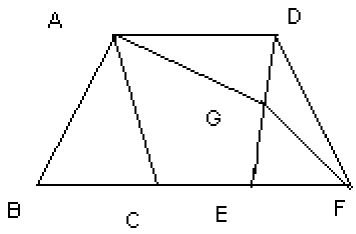


FIGURA 3

DEM.: Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos iguais, sobre mesma base BC, EF e da mesma parte. Suponhamos que estes dois triângulos estão sob as mesmas paralelas conforme figura 3 acima.

Traça-se a reta AD. Consideremos que AD paralela a BF. Se AD não é paralela a BF, pelo ponto A, traça-se AG paralela (Pr. 31.1) a BF, e trace a reta GF. Os triângulos ABC, GEF são iguais (Pr. 38.1), porque estão postos sobre as bases iguais BC, EF, e entre as mesmas paralelas BF, AG. Mas também o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, por hipótese. Logo, também será igual a DEF + GEF, isto é, um triângulo maior igual a um menor, o que não é possível. Logo AG não é paralela a BF. Do mesmo modo se prova que nenhuma outra reta, fora à reta AD, é paralela a BF. Logo, as duas AD, BF são paralelas.

PROPOSIÇÃO XLII PROB. “Construir um paralelogramo, que seja igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro dado”.

Seja dado o triângulo ABC, e o ângulo reto $\hat{D}$. Deve-se construir um paralelogramo igual ao triângulo ABC, e com um ângulo igual ao ângulo $\hat{D}$.

Divida-se a base BC em duas partes iguais (Pr. 10.1.) no ponto E; traça-se AE cuja intersecção com a reta EC é o ponto E de maneira que (Pr. 23.1.) o ângulo C$\hat{E}$F = $\hat{D}$. Pelo ponto A traça-se AG paralela (Pr. 31.1.) a EC, e pelo ponto C a reta CG paralela a EF. Será FECG um paralelogramo. E sendo BE = EC, o triângulo AEB será igual ao triângulo AEC (Pr. 38.1.), por estarem ambos sobre as bases iguais, BE, EC, e entre as mesmas paralelas BC, AG. Logo, o triângulo ABC é o dobro do triângulo AEC. Mas também o paralelogramo FECG é o dobro (Pr. 41.1.) do triângulo AEC, que se acha sobre a mesma base, entre as mesmas paralelas do paralelogramo FECG. Logo, o paralelogramo FECG é (Ax. 6) igual ao triângulo ABC, e têm o ângulo C$\hat{E}$F = $\hat{D}$, que é o ângulo dado. Logo, temos construído o paralelogramo que se pedia. Como vemos na **Figura 4**.

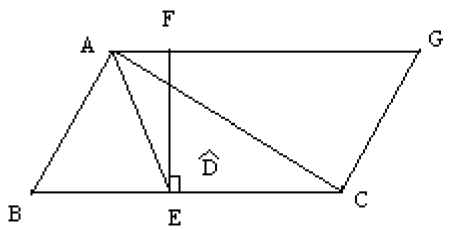


FIGURA 4

Para Euclides, figuras que tem a mesma base e estão entre as mesmas paralelas, possuem a mesma área. Como podemos verificar nas proposições anteriores.

Para os matemáticos do Ocidente o livro Os “Elementos de Euclides”, chegam ser de uma leitura obrigatória.

Já na China temos a obra “Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática” do Séc. I d.C., um dos textos chineses mais antigos que temos conhecimento. Contém 246 problemas relacionados com mensuração de terras, agriculturas, engenharia, impostos, cálculos, soluções e propriedades dos triângulos retângulos e trata de áreas com figuras planas pelo método do empilhamento de peças. É análogo ao Tangran.

Assim como nos papiros, este texto chinês não fazia provas nem demonstrações.

O reaparecimento do conceito de área se deu no século XVII. Esses problemas tratavam de comparar, segundo suas áreas, duas figuras planas cuja área de uma é supostamente conhecida.

Segundo Baltar (1996, pg. 17), o problema que se coloca então é de relacionar as superfícies, de acordo com as suas áreas, mais do que de medi-las. Nessa época o método indivisível - ou método de Cavalieri[1] - é confrontado com o método da exaustão[2] - ou método de Arquimedes. Os problemas de quadratura, e por conseqüência a noção de área impulsionou uma importante discussão sobre o processo de "descoberta", de "invenção" e de "demonstração" em matemática.

Demonstrar a igualdade de áreas de duas superfícies A e B, segundo o método de exaustão, consiste em mostrar que a área de A é maior que a área de B e que a de A é menor que a de B, isto é uma contradição. Por conseqüência A=B.

Para Baltar o conceito de área por intermédio dos problemas de quadratura tem uma importância, pois foi o que impulsionou a discussão sobre os métodos em Matemática e sobre os conceitos fundamentais de infinito e contínuo.

---

[3] **Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 – 1647:** Em 1635, publicou sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibilibus continuorum nova*, em que desenvolveu a idéia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas - uma região, por exemplo, pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou "indivisíveis" e que um sólido pode ser considerado como composto de regiões que têm volumes indivisíveis. O raciocínio utilizado é o mesmo daquele de Arquimedes; entretanto, a diferença está na maneira como os dois demonstraram tal pensamento. A teoria de Cavalieri permitiu-lhe determinar rapidamente áreas e volumes de figuras geométricas. Seu método sobre os indivisíveis foi muito criticado na época, pois não apresentava o rigor matemático desejado. Cavalieri então, em 1647, publicou a obra *Exercitationes geometricae sex* , na qual apresentou de maneira mais clara sua teoria. Tal livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII.

[2] **Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.):** O método por ele usado, método da exaustão, inventado por Eudoxo (408-355 AC), permite encontrar aproximações sucessivas de uma dada área, por comparação com áreas conhecidas. O método da exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto que no cálculo se soma um número infinito de parcelas (no caso do círculo teríamos um polígono com um número infinito de lados), Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir a soma de uma série infinita irá ser necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. Não é pois correcto falar do método de Arquimedes como dum processo geométrico de passagem ao limite. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluído da matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas no entanto o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das ideias de limite e de infinito. De facto, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do séc. XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Com esse breve estudo histórico podemos perceber que a formulação do conceito e os cálculos de área teve toda uma complexidade na sua evolução.

1.2. Pesquisa feita por Ana Chiummo[3] sobre O Conceito de Áreas de Figuras Planas: Capacitação Para Professores do Ensino Fundamental.

Fizemos uma breve análise da tese de mestrado "O Conceito De Área De Figuras Planas: Capacitação Para Professores Do Ensino Fundamental".

Fundamentação Teórica

Ana Chiummo através da didática francesa estuda os conceitos de área e perímetro usando a noção de obstáculo.

Segundo Guy Bousseau em "Les obstacles espistemologique et les problèmes em mathematiques", RDM vol. 4 n° 2, 1983 (pág 179). "Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma didática conveniente. Tratar-se-á não de comunicar as informações que se queiram ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou ótimas entre aquelas as quais se opõem para obter um resultado no qual o aluno investigou."

A noção de obstáculo tanto é para analisar historicamente um conhecimento como para o ensino espontâneo do aluno. Existem dois tipos de obstáculos: epistemológico e didático.

[3] Ana Chiummo (1998), mestranda da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do professor Doutor Saddo Ag Almouloud

Apóia-se também na noção do teorema em ato e usa na sua análise como referência. Os Teoremas em ato são identificados por Baltar.

Baltar analisou o teorema em ação que, segundo ela, não se constrói por acaso, e sim por meio de situação-problema às quais os alunos são confrontados e se fortalecem. Ela apresenta uma lista de teoremas em ação ligados as situações dando sentindo a conceitos de área de superfícies planas.

Teorema em ação sobre a definição de área

TC1: A área é um espaço ocupado pela superfície.

TC2: A área é um número necessário de lajotas para recobrir uma superfície.

TC3: A área é um número obtido pela aplicação de uma fórmula.

TC4: A área é uma propriedade da superfície invariante por certas operações (uma grandeza).

Teorema em ação para todo tipo de superfície

T1: Se S e S' são quase separados, A (S U S') = A(s). (certo).

T2: A (F (S)) = A (S); por uma isometria F é uma superfície de S. (certo)

T3: Duas superfícies equidecomponíveis têm a mesma área. (certo)

T4: O recorte e a colagem conservam a área. (certo)

T5: Escolhendo-se uma unidade, duas superfícies de mesma medida têm mesma área. (certo)

T6: Se duas superfícies S e S' são constituída dos mesmos pedaços (equidecomponíveis) diferentemente dispostos, de modo que S' seja mais "compacto" que S, A (S) > A (S'). (falso)

T7: Duas superfícies que têm os mesmos lados têm a mesma área. (falso)

T8: Duas superfícies que têm as mesmas áreas têm o mesmo perímetro. (falso)

T9: Duas superfícies de mesmo perímetro têm a mesma área. (falso)

T10: A área e o perímetro de uma superfície variam no mesmo sentido. (falso)

Para superfícies usuais

T11: Dois retângulos de mesma área são idênticos. (falso)

T12: Dois triângulos (ou paralelogramos) de mesma base e altura têm a mesma área. (certo)

T13: Dois Paralelogramos de mesmos lados têm a mesma área. (falso)

T14: A medida da área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados. (certo)

T15: A área de um paralelogramo é o produto das medidas de seus lados. (falso)

T16: A área de um triângulo é o produto das medidas de seus lados. (falso)

T17: A área de quadrado é proporcional ao comprimento de seu lado, por conseqüência, se o lado do quadrado é o dobro, sua área dobra também. (falso)

T18: Dois retângulos de mesma área têm o mesmo perímetro. (falso)

T19: Dois retângulos de mesmo perímetro têm a mesma área. (falso)

T20: A área e o perímetro de um retângulo variam no mesmo sentido. (falso)

Sobre as deformações do paralelogramo

T21: O deslocamento de um lado do paralelogramo sobre seu suporte conserva a área. (certo)

T22: A rotação de um lado do paralelogramo ao redor de um vértice conserva a área. (falso)

T23: O deslocamento de um lado do paralelogramo sobre seu suporte conserva seu perímetro. (falso)

T24: A rotação de um lado do paralelogramo ao redor de um vértice conserva o perímetro. (certo)

Para os teoremas-em-ação, Baltar concluiu que são uma possibilidade de efetuar os reagrupamentos, que permite modelar o funcionamento dos conhecimentos dos alunos.

A abordagem do conceito de área, como grandeza, permitiu estabelecer entre as relações dos pólos geométricos e numéricos e favoreceu superação de certas dificuldades dos alunos.

Para Baltar e outros estudiosos, os diferentes conceitos sobre área são identificados por meio da medida da área, da comparação de áreas e superfícies e da construção de superfícies de mesma área de uma superfície dada.

Metodologia

Sua metodologia está dividida em quatro fases: a primeira trabalha com análises prévias; a segunda com a concepção e análise da seqüência didática; a terceira e a quarta consistem na experimentação, análise a posteriore e validação.

Problemática da Pesquisa

Sua problemática tem por objetivo detectar problemas que envolvam conceitos de área e perímetro e ajudar os professores a desenvolver o seu trabalho.

Sua pesquisa foi realizada junto aos professores do ensino fundamental, onde buscou conhecer se estes professores conheciam a história do conceito de área e perímetro ou se tinham curiosidade de pesquisá-la.

Em outro momento de sua pesquisa analisou a parte histórica abordada nos livros didáticos.

Além dos livros didáticos, Chiummo, estudou a Proposta Curricular do estado de São Paulo, e identificou que a mesma faz uma breve chamada para parte histórica no estudo de área e perímetro.

A problemática da pesquisa apóia-se na seguinte hipótese geral: “O desenvolvimento no ensino do conceito de área visto como grandeza permite aos alunos estabelecer relações necessárias entre os dois quadros (geométrico e numérico)”.

Chiummo decidiu investigar baseando-se nas seguintes hipóteses particulares:

HIPÓTESE (1): A abordagem proposta por certos professores não desenvolvem nos alunos uma concepção do conceito de área e sim permite relacionar o conceito de área e suas diferentes representações numéricas.

HIPÓTESE (2): Uma capacitação para os professores que considera os aspectos estudados pode induzir os professores a construir situações de ensino aprendizagem do conceito de área que levem os alunos:

1- a desenvolverem a noção de superfície e área trabalhando o ladrilhamento, a composição e a decomposição;

2- a sentirem, após esse estágio, a necessidade de passar do quadro geométrico para o quadro numérico, apresentando-lhes as fórmulas do conceito em questão.

HIPÓTESE (3): É indispensável diferenciar área de perímetro, para uma melhor aquisição do conceito de área.

HIPÓTESE (4): Um estudo das fórmulas de área e de perímetro de superfícies usuais, feito em relação com os invariantes geométricos das figuras, favorece a construção da noção de área como grandeza.

HIPÓTESE (5): A construção de situações para sala de aula nas quais o ponto de vista dinâmico intervém favorece o estudo dos invariantes geométricos que permitem conservar uma área e por conseqüência, a aprendizagem do conhecimento relacionado a comprimento e áreas.

Para validar suas hipóteses, Chiummo desenvolveu uma seqüência didática (em Anexo), onde considerou as dificuldades levantadas por Regine Douady, Paula Baltar, bem como em sua pesquisa.

As análises feitas por Chiummo mostram que temos numerosos conceitos em ação, em jogo na conceituação de área: conceitos de área, de grandeza, de medida, de número, etc.

Esta pesquisa feita por Chiummo sobre o ensino-aprendizagem sobre áreas, mostra as dificuldades que os alunos têm a respeito deste conceito. Uns dos aspectos que favorecem esta ocorrência foram às práticas e a escolha dos professores quando ensinam este conceito.

Uma das soluções dos problemas do ensino-aprendizagem da Matemática em geral, e do conceito de área em particular encontra-se na formação dos professores, tanto em níveis dos conteúdos, como em nível didático.

1.3 O conceito de área no saber Matemático

Aprender o conceito de área, enquanto um saber matemático, nos permite comparar e medir o espaço ocupado pela superfície e fundamentarmo-nos nos planos práticos e teóricos. Assim, trabalha Lima (1991), no seu livro “Medida e forma em geometria”, onde aborda de maneira elementar e sistemática a medida das figuras geométricas (comprimento e volume).

Lima (1991) trata de medir uma figura plana F, utilizando comparações das unidades de área, que exprime quantas vezes a figura F contém a unidade de área. Com isso ele estabelece fórmulas para as áreas das figuras geométricas mais conhecidas, como a área do quadrado e do retângulo.

Como já sabemos, o quadrado é um quadrilátero com todos os lados iguais e os quatro ângulos retos. Com isto Lima (1991) define a unidade de área de um quadrado como segue: "*Convencionaremos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado o quadrado unitário.*" (1991, p.11)

Assim ele observa que um quadrado com medidas inteiras pode ser decomposto por paralelas aos seus lados, se seu lado possui n quadradinhos, então a figura terá em sua superfície n^2 quadradinhos, cada um deles com lado unitário e, portanto com área igual a 1. Segue-se que o quadrado deve ter área n^2.

Analogamente Lima (1991) demonstra para um quadrado cujo lado mede $\frac{1}{n}$ e, portanto a área do quadrado é igual a $\frac{1}{n^2}$. Mais geralmente, se o lado de um quadrado T tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$, decompomos os lados do quadrado T em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Usando a decomposição de paralelas aos lados de T, obtemos uma decomposição de T em m^2 quadradinhos, cada um dos quais tem lado $\frac{1}{n}$, portanto a área de cada um desses quadradinhos é $\frac{1}{n^2}$, logo a área de T deve ser:

$$m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

ou seja,

$$\text{Área de T} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Podemos então concluir que a área do quadrado T, cuja medida de um lado é o racional

$a = \frac{m}{n}$, pode ser

Área de T = a²

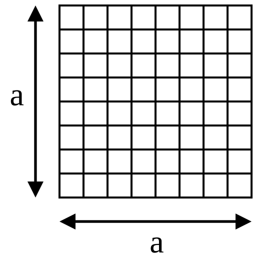


FIGURA 5: ÁREA DO QUADRADO T, CUJO LADO MEDE a.

Existem também quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Lima (1991) mostra que, mesmo assim, devemos obter a área de T = a².

Sejam $r, \sqrt{b}$, a, as medidas dos lados do quadrado T abaixo, $r <$ área de T, ou seja, $r^2 < a^2$. Como $\sqrt{b} < r$, então $\mathrm{b} < \mathrm{r}^2$. E como $r^2 < a^2$, portanto $b < r^2 < a^2$, logo $b < a^2$. Da mesma maneira se prova que todo número real c, maior que a^2, é maior do que a área de T. Portanto, a área de T, não pode ser nem maior e nem menor do que a^2. Por exclusão, deve-se então ter área de T = a².

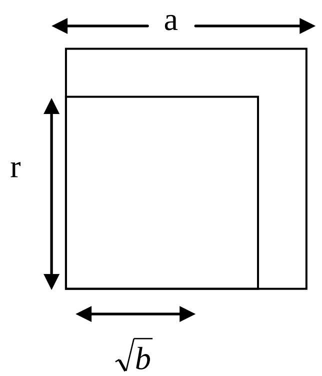


FIGURA 6: O QUADRADO DE LADO r ESTÁ CONTIDO NO QUADRADO T, DE LADO a.

Logo, concluímos que a área do quadrado T cujo lado mede a (a é um número real qualquer) deve ser expressa por:

Área de T = a^2

Este método de provar uma fórmula mostrando que desigualdade é impossível é devido a Eudóxio e é conhecido pelo ***método de exaustão***.

Podemos então dizer que a área de qualquer quadrado é a medida do lado elevado ao quadrado.

Agora iremos verificar a fórmula da área de um retângulo. Como já sabemos o retângulo é um quadrilátero com todos os quatro ângulos retos.

Lima (1991) começou provando a área do retângulo usando a seguinte idéia: Seja R um retângulo e seus lados medem m e n, então podemos decompor R por m e n quadrados unitários. De modo que se deve ter área de R = m.n.

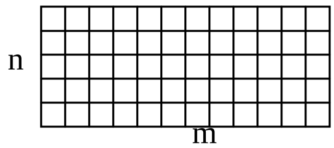


FIGURA 7: RETÂNGULO DECOMPOSTO DE m POR n QUADRADINHOS.

Se os lados de um retângulo R têm como medidas dois números racionais *a* e *b*, devemos escrever estes números como duas frações $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$, com o mesmo denominador *q*. Dividimos cada lado do retângulo em segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$. O lado que mede *a* ficará decomposto em *p* segmentos, e o lado *b* fica dividido em *r* segmentos. Traçando paralela aos lados o retângulo ficará dividido em *pr* quadrados, cada um deles medindo $\frac{1}{q}$. Como já sabemos que a área de um quadrado é o lado elevado ao quadrado então a área desses quadradinhos é : $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$.

Logo a área desse retângulo R deverá ser igual a:

$$(p.r).\frac{1}{q^2}=\frac{p.r}{q^2}=\frac{p}{q}.\frac{r}{q}$$

ou seja, se $a=\frac{p}{q}$ e $b=\frac{r}{q}$ então: Área de R = $a.b$

Diz-se, então que a área de um retângulo é base vezes a altura ou comprimento vezes a largura.

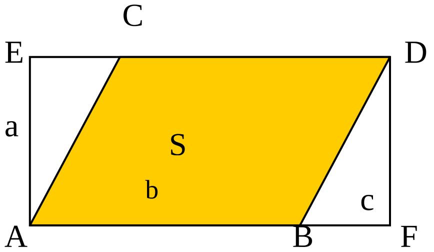
Existem também outras áreas conhecidas como a área do paralelogramo e do triângulo. Iremos provar a área das duas figuras planas.

Como sabemos o paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Lima demonstrou a área do paralelogramo da seguinte forma:

Seja ABDC um paralelogramo, cuja área S queremos calcular, sabendo que sua base AB tem comprimento b e sua altura DF tem comprimento a (Fig.8). O paralelogramo ABDC está contido num retângulo de base b + c e altura a. Como já provamos que a área do retângulo é base vezes a altura, então $(b+c).a=ba+ca$. Por outro lado, o retângulo é formado pelo paralelogramo dado mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo com área *ca*.

Portanto *ba* + *ca* =*S* + *ca*, donde *S*= *ba*.



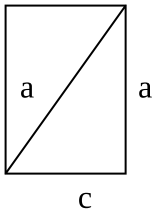


FIGURA 8: O RETÂNGULO AEDF, CUJA ÁREA VALE *ba* + *ca*,É FORMADO PELO PARALELOGRAMO, CUJA ÁREA É *S* SE DESEJA CALCULAR

Assim a área do paralelogramo é igual ao produto do comprimento da altura pelo comprimento da base.

Lima determina a área do triângulo através da fórmula da área do paralelogramo, pois todo triângulo é a metade de um paralelogramo.

Dado um triângulo ABC, cuja área desejamos calcular, traçamos pelos vértices C e B, respectivamente, paralelas aos lados AB e AC (Fig. 9). Estas retas se encontram no ponto D e fornecem um paralelogramo ABDC de área igual a *ba*. Ora, os triângulos ABC e BCD são congruentes, pois tem um lado comum compreendido entre dois ângulos iguais, logo têm a mesma área. Portanto, área do paralelogramo ABDC = $2.(\textit{área}\text{ de ABC})$ e, por conseguinte:

$$\text{Área do triângulo ABC} = \frac{1}{2}b.a$$

ou seja, a área de um triângulo é a metade do produto de sua base pela altura correspondente.

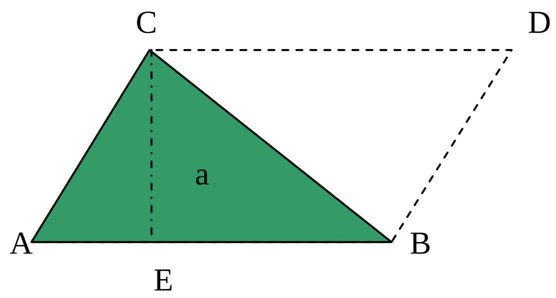


FIGURA 9: OS TRIÂNGULOS ABC E BCD SÃO CONGRUENTES, LOGO TÊM A MESMA ÁREA.

Para calcular a área de um polígono qualquer, devemos decompor a figura em triângulos, paralelogramos, ou qualquer outra figura cuja área sabemos calcular. Então a área do polígono calculada é a soma de todas as áreas das figuras decompostas.

1.2.1 Definição geral de área.

Lima mostrou que se pode associar a cada polígono um número real não-negativo, chamando a área de P, com as seguintes propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais;
2. Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de P = 1;
3. Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos soma as áreas das figuras decomposta dos n polígonos, achamos a área do polígono P desejado.

No item 3 podemos definir que se o polígono P está contido no polígono Q então a área de P é menor que a área de Q. Se observarmos bem, notaremos que as fórmulas para as áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do triângulo, foram deduzidas a partir dessas três propriedades.

Não temos ainda uma definição geral para a área de uma figura plana. Em particular não sabemos calcular a área de um círculo, de uma elipse, etc. Mas veremos como Lima define a área de uma figura plana arbitrária.

Seja F uma figura plana arbitrária. Sua área é um número real não negativo, que indicaremos como a(F). Acharemos seus valores aproximados, por falta ou excesso.

Os valores de a(F) aproximados por falta são por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F. Os valores aproximados por excesso são áreas dos polígonos P’que contém F. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contidos em F) e P’(contendo F), o número a(F) satisfaz às desigualdades.

$$a(P) \leq a(F) \leq a(P')$$

Vamos limitar nossa atenção aos polígonos retangulares, pois sabemos calcular. Um polígono retangular é a reunião de vários retângulos justapostos. A área de um polígono retangular é a soma das áreas que o compõem. Além disso, para simplificar, limitaremos nossa atenção a polígonos retangulares contidos na figura F cuja área desejamos calcular, ou seja, apenas valores aproximados por falta para o número real a(F).

Assim definiremos a área da figura F como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F, ou seja, $a(P) \leq a(F)$

1.4. O conceito de área no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e o Planejamento de Escolas.

1.4.1. Parâmetro Curricular Nacional (PCN).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais no contexto de Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações e das culturas.

Os PCN para o ensino e aprendizagem de Matemática do Ensino Fundamental faz referência a quatro ciclos, sendo que o primeiro ciclo refere-se a 1ª e 2ª séries; o segundo ciclo a 3ª e 4ª séries; o terceiro ciclo a 5ª e 6ª séries; o quarto ciclo de 7ª e 8ª séries.

O nosso estudo abrange o terceiro e o quarto ciclos do Ensino Fundamental.

Nos objetivos do ensino da Matemática listados pelos PCN encontramos uma referência em relação ao calculo de área:

> *" No terceiro ciclo, o ensino de Matemática deve visar o conhecimento:*
> *[...]*
> - *Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:*

[...]
- Resolver situações-problema que envolva figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução." (PCNs, p. 64 e 65)
"No quarto ciclo, o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento":

- *Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:*

[...]
- Obter e utilizar fórmulas para o calculo de área de superfícies planas, [...]." (PCNs, p. 81 e 82)

Já na rubrica " Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no Quarto Ciclo" o estudo do conceito de área, no bloco de Grandezas e Medidas, podendo ampliar o grau dos conceitos desenvolvidos.

"[...]
- *Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.*
- *Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de retas e / ou arcos de circunferência).*
- *Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).*
- *"Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências." (PCNs, p. 89 e 90)*

Também, sob a rubrica "Orientações Didáticas para o terceiro e quarto ciclo" no bloco de grandezas e medidas, os PCN, sobre o conceito de área, propõem:

"[...]

No trabalho com as medidas é bastante freqüente os alunos confundirem noções de área e de perímetro ou estabelecerem relações não verdadeiras entre elas. Uma das possíveis explicações é a de que, raramente, os alunos são colocados ante situações-problema em que as duas noções estejam presentes. Cria-se a possibilidade para que o aluno compreenda os conceitos de área e perímetro de forma mais consistente.

Outro aspecto a ser salientado em relação às áreas e perímetros diz respeito a obtenção de fórmulas. A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente as fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica ou controle, além de esquecerem rapidamente. Desse modo, o trabalho com área deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área na composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposições de figuras), por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações.". (PCNs, p. 130 e 131)

Temos, então, que tanto no conteúdo como nas Orientações Didáticas, os PCN fazem referência ao conceito de área.

Agora iremos verificar o que a Proposta Curricular de Santa Catarina, propõe para ser estudado sobre o conceito de área no Ensino Fundamental.

1.4.2 Proposta Curricular de Santa Catarina

A proposta curricular de Santa Catarina (PCSC) estabelece às bases no ensino de matemática em quatro campos de conhecimento: O Campo Numérico; O campo Algébrico; O Campo Geométrico; e Estatística e probabilidade.

Embora o PCSC apresenta um quadro de conteúdos e seus cronogramas, nos campos e conhecimentos deixa aberta a possibilidade de novas proposições.

Entretanto, "deve apresentar um caráter dinâmico e processual, não é definitiva, estando aberta para novas contribuições e reformulações, embora esta PCSC esteja sugerindo a sistematização dos conceitos a partir de uma determinada série, isto não impede que ela pode ser vista antes. Também convém lembrar que a utilização de determinados conteúdos não se esgota nas séries onde é sistematizado".(p. 106 - 108)

Na Orientação Pedagógica Básica a PCSC, fala sobre a produção histórico-cultural que deve de ser adotado desde a Educação Infantil até a Educação de Jovens e Adulta. Já o que diz respeito ao ensino dos Campos Geométricos é possível verifica-se de uma característica e habilidade socialmente relevante, que pode contribuir para a formação do pensamento do aluno, que é:

- "Medição do espaço geométrico uni, bi e tridimensional (conceito e cálculo de perímetro, de área, de volume e capacidade)".

Enfim, o objetivo da Proposta Curricular é levar o aluno construir o seu conhecimento, aproveitando tudo que o aluno trás consigo de seu cotidiano.

Nós temos dúvidas e fazemos a seguinte questão:

Será que o conceito de área está sendo ensinado conforme pede os PCNs e a PCSC no Ensino Fundamental?

1.4.3. Planejamentos Anuais Escolares

Analisaremos os planejamentos anuais de duas escolas: uma particular(X) e uma municipal(Y). De 5ª à 8ª série.

Primeiramente verificamos se o estudo sobre “Conceito de Área”, constava nos planejamentos e destacamos em cada planejamento o que é proposto de geometria.

<u>5ª série:</u>

- **Planejamento da Escola X:** - identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não), para medir grandezas de superfície e comprimento; - decomposição da área de figuras planas por meio de composição e decomposição de figuras planas; - obter medidas por meio de estimativas e aproximações; -comparar a área e o perímetro de diferentes figuras;
- **Planejamento da Escola Y:** - Recortando quadrados; - triângulos recortados de quadrados; - compondo e decompondo figuras planas; Medida de superfície e cálculo de áreas; - área do triângulo; - área do quadrado; - Aproximações e estimativas;

<u>6ª série:</u>

- **Planejamento da Escola X:** - Não possui um conteúdo próprio sobre conceito de área, mas é trabalhado o cálculo de área usando apenas fórmulas em outros conteúdos;

- **Planejamento da Escola Y:** - o conceito de área não é trabalhado, raramente é encontrado algum exercício que envolva este conteúdo;

<u>7ª série:</u>

- **Planejamento da Escola X:** - determinação da área de quadriláteros num quadriculado; - Cálulo da área de um círculo; - Cálculo de áreas; - uma curiosidade da história da matemática (cálculo de área de um círculo baseada na área do quadrado – Papiro de Rhind);
- **Planejamento da Escola Y:** - Cálculo de área de figuras planas; - Equivalência de áreas;

<u>8ª série:</u>

- **Planejamento da Escola X:** - Cálculo de área de figuras planas; - relação entre área e perímetro; - cálculo de área de figuras por decomposição; - cálculo de área de polígonos regulares; - cálculo de área de círculo, setor circular, coroa circular;
- **Planejamento da Escola Y:** - cálculo da área do círculo; - áreas circulares e probabilidades; - cálculo de perímetro de uma circunferência;

Percebemos que o planejamento de 5ª série é trabalhado o conceito de área muito através de composição e decomposição de figuras. Já na 6ª não se encontra explicitamente o "conceito de área". Na 7ª série é ensinado o cálculo de áreas através de fórmulas. E na 8ª a prioridade é para cálculo de área de círculos através de fórmulas.

Concluímos que o estudo do "conceito de área" indicado nos PCN em relação aos planejamentos, não é estudado o conceito histórico e não é de forma espiral, como podemos observar pelo planejamento da 6ª série.

1.5. Conclusão

Historicamente o estudo de área era trabalhado sobre a resolução de problemas. Este estudo nos permite identificar que até antes do Euclides não se fazia demonstrações matemáticas. E que os matemáticos que exploraram o conceito de área de figuras utilizaram os conhecimentos passados de um historiador para o outro, como por exemplo, a matemática egípcia e a matemática babilônica.

A matemática egípcia e a babilônia deixam bem evidente que de um século para o outro, não se fazia pesquisa e que se aproveitava os métodos da resolução conhecidos.

Podemos identificar o processo de evolução do conceito de área, na obra de Euclides que ele não define área, mas utiliza o método de superposição de figuras, e figuras que possuem a mesma base que estão entre as mesmas paralelas são "iguais", ou seja, são de mesma área. Já no século XVII surgem problemas de quadraturas, havendo um confronto entre o método de Cavalieri (indivisíveis) e o método de Arquimedes (exaustão). Em função da noção de área.

Ana Chiummo fez sua pesquisa voltada para os professores do Ensino Fundamental de São Paulo. Analisando como os professores do Ensino Fundamental estão ensinando para os alunos o conceito de área, se é através de fórmulas ou se é através de ladrilhamentos, composições e decomposições de figuras, contando a história do conceito de área e do perímetro, etc.

Constatou-se que o teorema-em-ação, identificado por Baltar que diz: *"a área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula".*

Chiummo notou que*: "o teorema*-em-ação*, se faz presente quando os professores iniciam os conceito de área e perímetro, utilizando a fórmula trabalhando apenas figuras usuais".*

Com isto sua fundamentação teórica e sua problemática tiveram como base a teoria de situação de Guy Brousseau (1986) e resultados de Baltar (1996), de Douady (1989), e outros.

Chiummo não aborda todos os enfoques sobre o cálculo de área, porque o objetivo de sua seqüência didática foi fornecer mais um instrumento para os professores do Ensino Fundamental.

Já a obra de Lima (1991), na atualidade, ele define e demonstra o conceito de área do quadrado, do retângulo, do triângulo, do paralelogramo e polígonos em geral. Para ele a medida das figuras tem origem na noção de grandezas incomensuráveis, portanto de números racionais.

Verificamos que os PCNS e a PCSC, tem o pensamento geométrico, o objetivo da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema que envolva figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. Para depois introduzir as deduções das fórmulas.

Concluímos que os dois planejamentos anuais trabalham sobre a proposta dos PCNS e PCSC, mas não de forma espiral. Pois na 6ª série não é visto um conteúdo próprio do conceito de área.

O que traz os livros didáticos sobre o conceito de área no Ensino Fundamental? Apresentamos no capítulo seguinte o estudo de livros didáticos, o qual nos dá elementos de respostas a esta questão.

CAPÍTULO II - ETUDOS DOS LIVROS DIDÁTICOS.

Como já verificamos os PCN propõem um ensino mais adequado às novas demandas sociais e científicas e não apenas voltado à preparação dos alunos para estudo posteriores.

Os PCN auto definem-se como uma proposta de ensino aprendizagem que propõe a organização de conteúdo em espiral e com várias conexões dando menor importância da idéia do pré-requisito. (O que eles (PCN e PCSC) dizem precisamente sobre a abordagem de área).

Tomamos estas informações como princípios norteadores e nos apoiaremos nela para o estudo dos livros didáticos, analisando assim os seguintes livros didáticos: "Matemática Para Todos" de Imenes & Lellis e "Matemática Hoje é Feita Assim" de Antônio José Lopes Bigode.

1.1 Análise do livro "Matemática Para Todos".

As coleções de 5ª à 8ª série, tem os mesmos princípios norteadores que os apresentados pelos PCN, como podemos ver em alguns itens citados:

- Valoriza o conhecimento extra-escolar dos alunos;
- O autor valoriza também as idéias e a participação dos alunos e apresenta atividades que propiciam a compreensão;
- Estimula o raciocínio e a construção do conceito matemático, utilizando situações-problema;

Os assuntos são abordados mais de uma vez, de diferentes formas, nos vários ciclos, acompanhando as experiências dos alunos.

Segundo o autor a retomada dos temas garante não só a memorização, mas também a reelaboração dos conhecimentos adquiridos, o que vai aprofundando a compreensão dos alunos. Considerando que os conteúdos são abordados em diferentes momentos tendo mais detalhes e de aspectos mais complexos, respeitando a experiência matemática e ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Podemos afirmar assim que existe uma intenção de realizar uma abordagem em espiral.

O tratamento em espiral também subverte[6] a rígida exigência de pré-requisito tradicional.

Cada um dos livros desta coleção está dividido em capítulos e estes capítulos estão divididos em itens. Estes itens possuem textos, perguntas sobre o texto; alguns itens possuem Ação (pode ser um jogo ou uma construção com papel e tesoura, etc.); problemas e exercícios; problemas e exercícios para a casa; um toque a mais (que fica no final de cada capítulo, que pode conter uma atividade de investigação, história matemática, uma técnica, uma conexão com geografia, etc.); problemas e exercícios complementares; dicionário; supertestes; conferindo respostas; vestibulinho; bloco de folhas especiais.

Estudo do livro de 5ª série

O livro da 5ª série está dividido em 15 capítulos. Estes capítulos estão subdivididos em itens. O capítulo 12 “Áreas e Perímetros” contempla nosso objeto de estudo por isso restringimos nosso estudo deste livro a este capítulo.

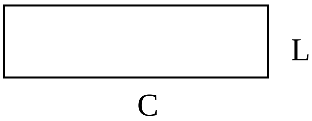
Este capítulo aborda a Noção de Área baseado nos conhecimento do aluno. O texto deste item fala de dois pátios com malhas quadriculadas, e pede que o aluno diga qual dos dois pátios é maior contando a quantidade de lajotas, usando composição e decomposição de figuras. Não há uma definição formal sobre área. A partir deste texto são trabalhados exercícios.

A necessidade de uma fórmula para o cálculo de área:

Definição Área de Retângulos: Mostra que até uma certa quantidade de quadradinhos é possível contar, sem utilizar a fórmula, mas dependendo do retângulo com malhas quadriculados como no exemplo abaixo, é muito trabalho ficar contando quadradinho por quadradinho, com isto ele demonstra a fórmula do retângulo e por conseqüência a fórmula do quadrado.

Então, vamos fazer uma generalização, ou seja, vamos tirar uma conclusão geral, válida para todos os retângulos que podemos imaginar: a área de qualquer retângulo é igual ao comprimento multiplicado pala largura.

Essa conclusão geral pode ser escrita desta maneira resumida:



$A = C . L \longrightarrow$ Esta é a fórmula da área do Retângulo

Na fórmula, a letra A representa a área do retângulo, C representa o comprimento e L representa a largura. Se as medidas C e L estão em centímetros, à área é indicada em centímetros quadrados.

A fórmula da área do retângulo também serve para calcular a área do quadrado porque podemos considerar o quadrado como um retângulo com todos os lados iguais. A fórmula, então, é esta:

L

L

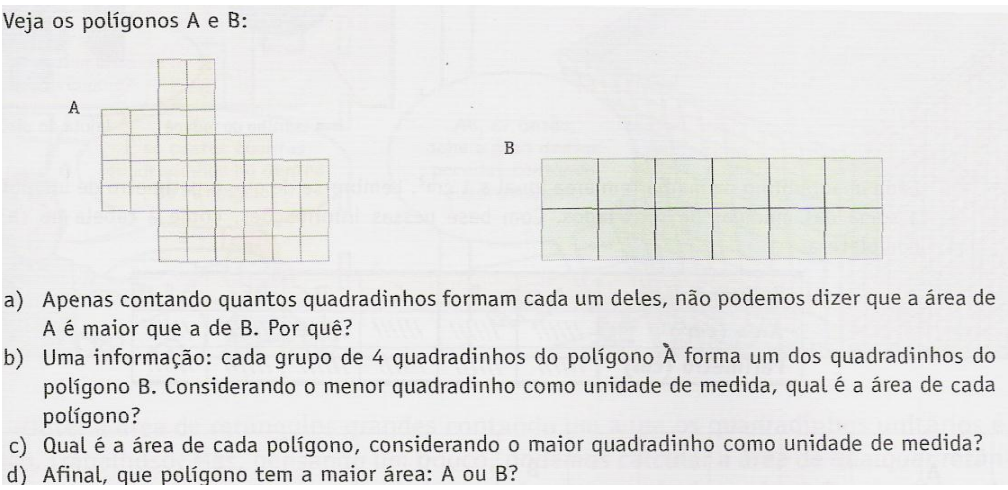
$A = L . L$ OU $A = L^2$

Esta é a fórmula do quadrado.

Há um item que trata sobre unidade de medida de área, conceitualmente busca-se formar a idéia das unidades de área que aparecem mais no dia-a-dia: quilômetro quadrado, metro quadrado, hectare, etc. Quanto aos procedimentos é trabalhado com transformações de unidades mais comuns, como o cm², m² e o km².

Este capítulo tem 107 exercícios sendo 80 exercícios envolvendo área, 12 envolvendo perímetros e 15 é sobre transformações de medidas. Analisamos os exercícios deste capítulo e anotamos as seguintes tarefas que foram abordadas e daremos um exemplo de cada tipo de tarefa.

Tarefa 1: Comparar áreas de polígonos



Veja os polígonos A e B:

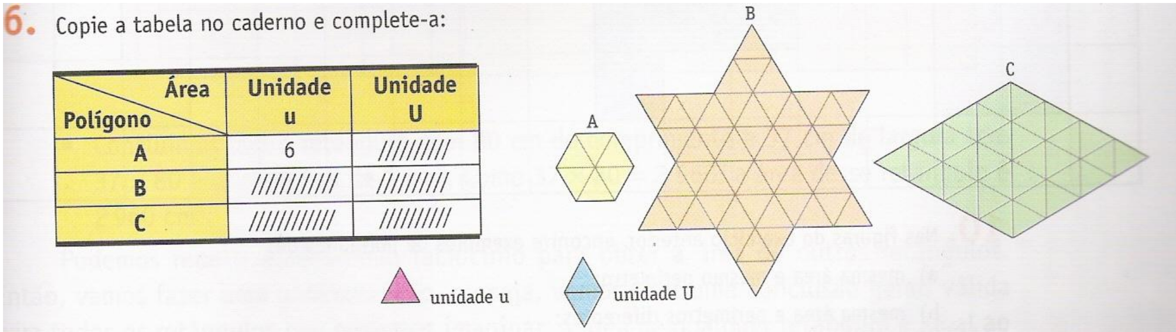
a) Apenas contando quantos quadradinhos formam cada um deles, não podemos dizer que a área de A é maior que a de B. Por quê?
b) Uma informação: cada grupo de 4 quadradinhos do polígono A forma um dos quadradinhos do polígono B. Considerando o menor quadradinho como unidade de medida, qual é a área de cada polígono?
c) Qual é a área de cada polígono, considerando o maior quadradinho como unidade de medida?
d) Afinal, que polígono tem a maior área: A ou B?

Resolução:

a) Porque os quadradinhos que formam A não são do mesmo tamanho dos que formam B.
b) Utilizando o método da contagem podemos verificar que a área de A = 42; área de B = 12.
c) Área de A = 10,5; área de B = 12.

d) O polígono B.

Tarefa 2: Determinar área de figuras sobre malhas.

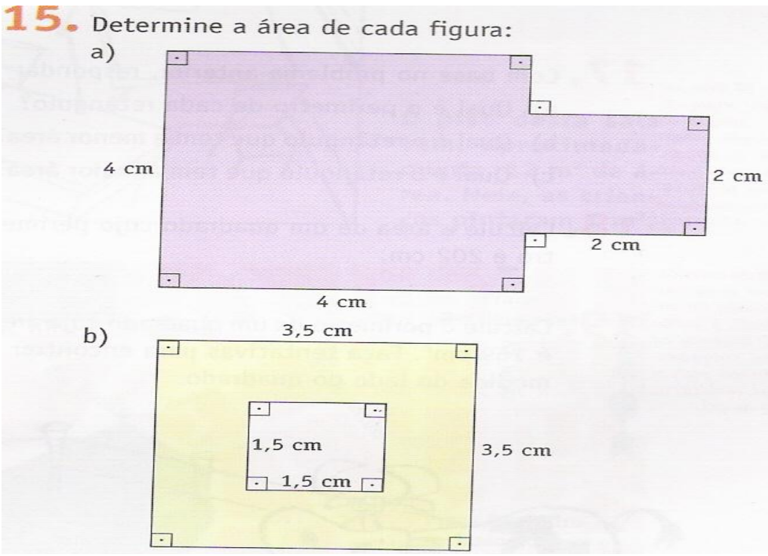

6. Copie a tabela no caderno e complete-a:

Área / Polígono	Unidade u	Unidade U
A	6	/////////
B	//////////	/////////
C	//////////	/////////

Resolução:

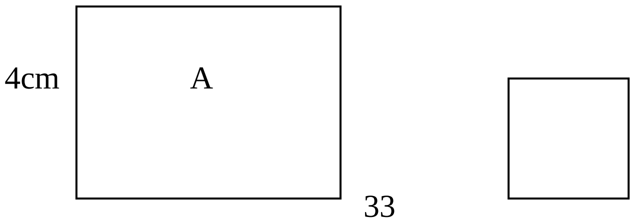
i. Área do polígono A é igual a 3 U²;
ii. Área do polígono B é igual a 48 u² ou 24 U²;
iii. Área do polígono C é igual a 32 u² ou 16 U²

Tarefa 3: Determinar área de figuras planas através de fórmula.



Resolução:

a)



B 2 cm

4cm 2 cm

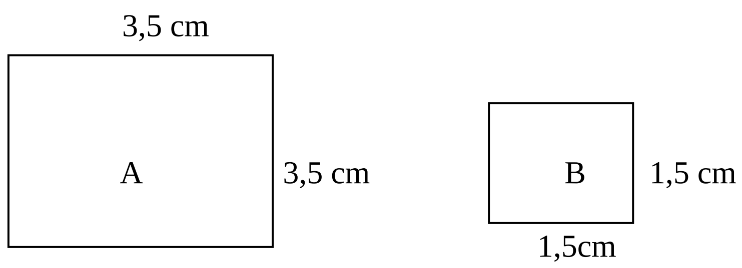
Área Total = área de A + área de B

Área Total = 4 cm . 4 cm + 2 cm . 2 cm

Área Total = 16 cm² + 4 cm²

Área Total = 20 cm²

b)



Área Total = área de A - área de B

Área Total = 3,5 cm . 3,5 cm - 1,5 cm . 1,5 cm

Área Total = 12,25 cm² - 2,25 cm²

Área Total = 10 cm²

Tarefa 4: Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área.

28. Copie as tabelas no caderno e complete-as:

Medida do lado do quadrado em m	10	//////////	13	//////////
Área em m²	100	144	//////////	225

Medida de um lado em m	5	6	6	11
Medida do outro lado em m	//////////	17	//////////	//////////
Área do retângulo em m²	80	//////////	108	143

Resolução:

Sabendo que área do quadrado é lado vezes lado ou lado elevado ao quadrado:

$A = L^2$

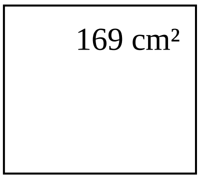
Medida do lado do quadrado em m.	10	12	13	15
Área em m²	100	144	169	225

Medida de um lado em m	5	6	11
Medida do outro lado em m	16	17	13
Área do retângulo em m²	80	102	143

Tarefa 5:Calcular o perímetro.

9. Calcule o perímetro de um quadrado cuja área é 169 cm². Faça tentativas para encontrar a medida do lado do quadrado.

Resolução:



L

$P = 4.L$
$A = L^2$
$169 = L^2$
$L = 13$ cm

$P = 4 .13$
$P = 52$ cm

Tarefa 6: Transformações de medida.

24. Responda:

a) O lado de um quadrado é 1 m. Quanto mede esse lado em centímetros?

b) Qual é a área desse quadrado em metros quadrados?

c) Qual é a área desse quadrado em centímetros quadrados?

d) De acordo com as respostas anteriores, um metro quadrado tem quantos centímetros quadrados?

Resolução:

a) 1 m corresponde a 100 cm, então o lado desse quadrado mede 100 cm.

b) $A = L^2$
$A = 1^2$
$A = 1\ m^2$

c) $A = 100^2$
$A = 10\ 000\ cm^2$

d) $1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2$

Tabela 1: Estudo dos exercícios da 5ª série

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Características	Nº de exercícios
1. Comparar áreas de polígonos;	• Contagem; • Comparar medidas; • Fórmula: $A = C . L$, $A = L^2$;	• Quadrado; • Retângulo;	• Malhas quadriculadas; • Pelo menos lados paralelos a borda do papel; • Construir figuras planas;	13
2. Determinar a área de figuras sobre malhas;	• Contagem; • Apreensão operatória;	• Retângulos; • Triângulos; • Hexágono; • E outros;	• Malhas triangulares; • Malhas quadriculadas;	37
3. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• Fórmulas: $A = L^2$ $A = C.L$	• Quadrados; • Retângulos;	• Pelo menos lados paralelos a borda do papel;	23

4. Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área;	• Fórmulas: $L = \sqrt{A}$ $L = \dfrac{A}{H}$	• Retângulo; • Quadrado;	• Desenhar figuras planas;	7
5. Calcular o perímetro;	• Fórmula: P = 4.L e P = 2C + 2L	• Quadrado; • Retângulo;	• Desenhar figuras Planas; • Malha quadriculada;	12
6.Transformações de Medidas.	• 1 m – 100 cm • 1 km – 1000 m	• Quadrado; • Retângulo;	• Desenhar figuras Planas; • Malha quadriculada;	15

Com este estudo verificamos que 37 de 107 exercícios explora a contagem e a apreensão operatória. Enquanto 23 dos 107 exercícios são relativos ao cálculo de área por meio de fórmulas. O que indica que na 5^a série predomina o uso da contagem e da apreensão operatória na resolução dos exercícios.

Cabe ainda salientar nos exercícios onde a figura é dada, pelo menos um lado das figuras é paralelo a borda do papel. E que 17 dos 30 exercícios que foram dadas as figuras são de forma retangular. O que podemos observar que 56 % dos exercícios utiliza o retângulo como figura base para o cálculo de área.

Estudo do livro de 6ª série

O livro da 6ª série está dividido em 14 capítulos, sendo que o capítulo que iremos analisar é o capítulo 12 que trata de áreas e volumes, só que o objetivo de nossa análise é apenas área.

O primeiro e o único item deste capítulo que nos interessa, é a atividade designada "Ação com o tangran", o tangran é um antigo jogo chinês formado por sete polígonos com os quais pode ser feita uma grande variedade de figuras. Usando o tangran o autor propõe que o aluno trabalhe com decomposição e composição de figuras, figuras complexas são transformadas em outras mais simples, de mesma área, o que facilita o cálculo dessas áreas (triângulo, trapézio, paralelogramo, etc.). Seguido de exercícios.

Foram estudados 38 exercícios sobre conceito de área. Todos estes exercícios propõem a manipulação do tangran, ou seja, deve produzir para uma interpretação e elaboração de uma conjectura de resolução, utilizando a figura de estudo, além do teórico, que é objeto do capítulo.

Na resolução dos exercícios explora-se noções de unidade de áreas, equivalência de figuras, relação entre o metro quadrado e o centímetro quadrado.

Apresentaremos a seguir as tarefas identificadas nos 38 exercícios de resolução, onde os exemplos de cada tipos de tarefa já foram vistas no livro de 5^a série.

Tabela 2: Estudo dos exercícios da 6ª série.

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Características	Nº de exercícios
1. Comparar áreas de polígonos;	• Contagem; • Comparar medidas;	• Quadrado; • Retângulo; • Polígonos de lados retos; • Polígonos côncavos;	• Malhas quadriculadas; • Pelo menos lados paralelos a borda do papel;	6
2. Determinar a área de figuras sobre malhas;	• Contagem; • Apreensão operatória;	• Retângulos; • Triângulos; • Polígono lado reto;	• Malhas quadriculadas; • Pelo menos lados paralelos a borda do papel;	9

3. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• $A = L^2$ • $A = C . L$ • $A = B . H$ • Comparação de medidas;	• Quadrados; • Retângulos; • Triângulos; • Polígonos lado reto;	• Malhas quadriculadas; • Pelo menos lados paralelos a borda do papel;	14
4. Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área;	----------------	--------------------	-------------------	---------------
5. Calcular o perímetro;	• Fórmula: $P = 4.L$ e $P = 2C + 2L$	• Quadrado; • Retângulo;	• Pelo menos lados paralelos a borda do papel;	3
6.Transformações de medidas.	• 1 Km = 1000 m	--------------	-------------------	6

14 dos 38 exercícios são relativos ao cálculo de área através de fórmulas. Enquanto 9 dos 38 exploram a contagem e a apreensão operatória. O que indica, que na 6ª série predomina o uso de fórmulas na resolução dos exercícios.

Verificamos também nos exercícios, que na figura dada, pelo menos um dos lados é paralelo a borda do papel. E que das 30 figuras dadas 18 são polígonos regulares ou não regulares que utilizam decomposição para o cálculo de suas áreas.

Estudo do livro da 7ª série.

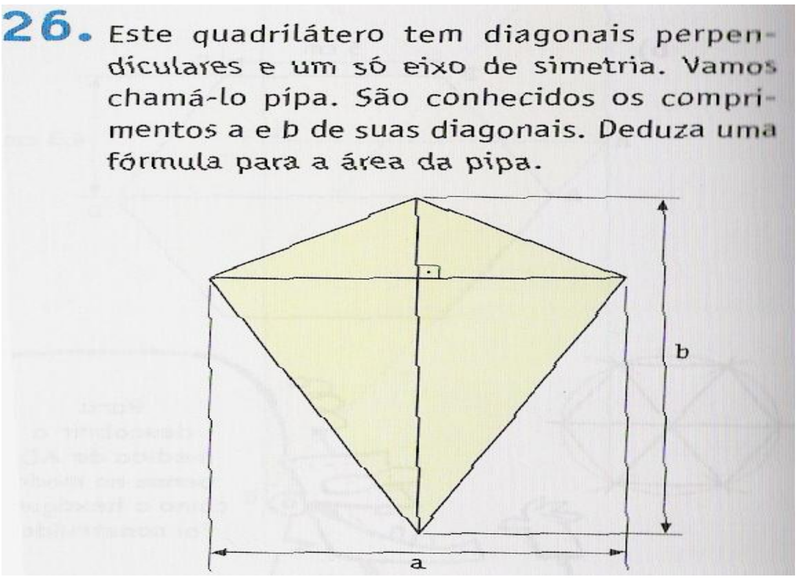
O livro da 7ª série possui 14 capítulos, mas estudaremos o capítulo 12 que trata de área e volume. O capítulo 12 começa com idéias do cálculo de áreas e de volumes. É retomado o assunto do conceito de área com vários avanços. Outro item importante que é dado está na apresentação das fórmulas das figuras planas mais comuns. Os quadriláteros são retomados com destaques. É feita também uma ação sobre deduções de fórmulas. Nos textos são apresentados às fórmulas das áreas dos paralelogramos e dos triângulos, e depois na ação os alunos deduzem as fórmulas do trapézio e do losango.

A apreensão operatória foi de grande utilidade desde a 5ª série, pois chegando na 7ª os alunos conseguem deduzir algumas fórmulas de área usuais como: o paralelogramo, o losango, o triângulo e o trapézio. Assim faz com que o aluno pratique o cálculo Algébrico.

Uma observação interessante é que o autor apresenta o teorema de Pitágoras na 7ª série, deduzido a partir de noções sobre área e de cálculo algébrico. Para chegar ao teorema, o ponto de partida é uma de suas aplicações práticas na construção civil. Uma vantagem nesta abordagem do teorema é que pode ser vista como relação de áreas. Na 8ª série este tópico é retomado.

Foram estudados 51 exercícios, sobre o conceito de área. Veja a tabela deste estudo e um exemplo da tarefa 7 que não foi identificada nos livros de 5ª e 6ª séries:

Tarefa 7: Deduzir fórmulas de área.



Resolução:

O eixo de simetria divide a pipa em dois triângulos iguais. A área de um deles é

$\dfrac{b.\frac{a}{2}}{2} = \dfrac{b.a}{4}$. Logo, a área da pipa é $2.\dfrac{b.a}{4} = \dfrac{b.a}{2}$

Tabela 3: Estudo dos exercícios da 7ª série.

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Características	Nº de exercícios
1. Comparar áreas de polígonos;	• Fórmula: A = B . H A = L ² A = π r² • Comparar medidas;	• Paralelogramo; • Triângulo; • Quadrado; • Circunferência;	• Pelo menos lados paralelos à borda do papel;	5
2. Determinar a área de figuras sobre malhas;	• Contagem; • Apreensão operatória; • Fórmula: A = B . H A = π r²	• Retângulos; • Triângulos; • Trapézio; • Circunferência; • Losango;	• Malhas quadriculadas;	15
3. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• A = L² • A = C.L • A = B.H	• Quadrados; • Retângulos; • Triângulos; • Trapézio; • Paralelogramo;	• Pelo menos lados paralelos a borda do papel; • E com lados inclinados para a borda do papel;	20
4. Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área;	--------------	----------------------	---------------------	----------------
5. Calcular o perímetro;	• Fórmula: P = 2C + 2L P = A+B+C P = A+B+C+D	• Paralelogramo; • Trapézio; • Triângulos;	• Malha quadriculada;	7
6.Transformações de medidas.	----------------	-------------------	------------------	-------------

7. Deduzir fórmulas de área;	• Fórmulas: A =2.r² $A = \frac{D.d}{2}$	• Losango; • Pêndulo;	• Desenhar figuras planas;	4

20 dos 51 exercícios são relativos ao cálculo de áreas através de fórmulas. Enquanto 15 dos 51 exercícios utilizam à técnica da contagem e da apreensão operatória. Assim podemos observar que nesta série predomina o uso de fórmulas nos exercícios resolvidos.

Ainda percebemos que 36 exercícios que contém figuras 24 são figuras com pelo menos um lado paralelo a borda do papel.

Estudo do livro da 8ª série.

O livro da 8ª série possui 14 capítulos, mas será estudado apenas o capítulo 4 que é sobre medidas. Este capítulo está dividido em itens que são sistemas decimais e não-decimais, calculando áreas e volumes. E o que iremos estudar é apenas o item do cálculo de áreas. Este item retoma e organiza idéias já apresentadas nas séries anteriores. São utilizadas para o cálculo da área do círculo: a técnica da contagem e composição e decomposição de figuras.

Também o capítulo 12 trabalha com a área de círculo através de fórmulas e composição e decomposição de figuras.

Mas só analisaremos os exercícios do capítulo 4. Veja a análise dos 22 exercícios sobre área:

Tabela 4: Estudo dois exercícios da 8ª série

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Características	Nº de exercícios
1. Verificar quantas vezes uma área cabe dentro da outra;	• Utilizando a fórmula: $A = \frac{B.H}{2}$ $A = B.H$	• Triângulos; • Paralelogramo;	• Desenhar dois triângulos; • Observar o Paralelogramo;	4
2. Determinar a área de figuras sobre malhas;	• Contagem; • Apreensão operatória;	• Circunferência; • Polígono qualquer;	• Malhas quadriculadas;	4
3. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• Fórmulas $A = L^2$ $A = C . L$ $A = B . H$ $A = \frac{B.H}{2}$ $A = \frac{(B+b).H}{2}$ $A = \frac{D.d}{2}$	• Quadrados; • Triângulos; • Paralelogramo; • Trapézio; • Losango;	• Lados retos para a borda;	6
4. Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área;	• Decompor o trapézio; • Teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$ • Fórmulas: $A = \frac{(B+b)}{2}$ $A = \frac{B.H}{2}$ $A = L^2$	• Trapézio; • Triângulo; • Quadrado;	• Trapézio;	5
5. Calcular o perímetro	----------------	----------------------	---------------------	-----------------
6. Tranformação de medidas	----------------	----------------------	---------------------	-----------------

7. Deduzir fórmulas de área;	• Apreensão operatória; • Fórmula: $A = \frac{Dd}{2}$ $A = L^2$ $A = B.H$ $A = \frac{(B+b).H}{2}$	• Trapézio; • Losango; • Retângulo; • Quadrado;	• Figuras planas;	3

6 dos 22 exercícios são relativos ao cálculo de área através de fórmulas. Enquanto 4 dos 22 são para calcular a área através de contagem e apreensão operatória. E 5 dos 22 são para determinar a medida de um dos lados da figura utilizando as fórmulas das áreas. Então, nesta série, um total de 11 exercícios aplica fórmulas na resolução dos exercícios.

Cabe ainda salientar que dos 17 exercícios com figuras, 9 são figuras que têm pelo menos um lado paralelo a borda do papel.

Portanto, os autores Imenes e Lellis, trazem textos significativos, apresentam atividades que proporcionam a compreensão e estimulam o raciocínio e a construção do conceito de área e técnicas. Os pontos fortes dessa coleção é que o autor trabalha muito bem o ladrilhamento, a composição e decomposição e leva os alunos a trabalharem o jogo de quadros, que é a passagem do quadro geométrico para o numérico.

1.2. Análise do livro Matemática "Hoje é Feita Assim".

Foram analisados os livros de 5ª a 8ª série sobre o conceito de área, e pudemos verificar que o livro da 6ª série não trabalha este assunto, área é somente é explorada no volume da 5ª e retomado na 7ª e 8ª.

Os livros desta estão divididos em capítulos e os capítulos estão divididos em itens. Os itens têm textos e exercícios. No final de cada capítulo tem exercícios de fixação e uma revistinha (história da matemática, jogo, uma pesquisa, etc) e no final do livro as respostas.

Estudo do livro da 5º série

O livro da 5ª tem 14 capítulos e o que iremos estudar é o capítulo 13: “Sistemas de Medidas” que trata sobre perímetros, conceitos de área, aproximação e estimativas. Este capítulo propõe atividades com palitos de fósforos no estudo da área e do perímetro.

Antes de falar do capítulo 13, notamos que no capítulo 10 o autor trabalha com composição e decomposição de figuras, onde um item trabalha o recorte de quadrados. O segundo item também trata dos quadrados e dos retângulos, que eles são de mesma família, a dos quadriláteros e mostra algumas características importantes de cada um. O terceiro item refere-se aos triângulos (isósceles, eqüilátero, escaleno). E o último item apresenta o tangran, trabalhando a composição e a decomposição de figuras do tangran. Só falamos rapidamente sobre este capítulo, para mostrar que antes de introduzir a área o autor trabalha com composição e decomposição de figuras.

Estudando o capítulo 13 “Sistemas de Medidas”, começamos por analisar o item medidas de superfícies e cálculo de áreas que fala sobre a área do retângulo. O segundo item é sobre a área do triângulo, utilizando a técnica da decomposição do retângulo. O terceiro item trabalhado é sobre a área do quadrado, através da área do retângulo. O último item analisado foi “Palitos, Áreas e Perímetros”, mostrando que figuras que têm o mesmo perímetro pode ter áreas diferentes.

Do capítulo 13, 23 exercícios foram analisados. Veja a seguir a tabela desta análise:

Tabela 5: estudo do livro da 5ª série

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Característica	Nº de exercícios
1. Identificar o número de lajotas;	• Fórmula: $A = B \cdot H$;	• Retângulo;	• Desenhar a figura;	1
2. Determinar a área de figuras sobre malhas;	• Contagem; • Apreensão operatória;	• Retângulos; • Triângulos; • Polígono em geral.	• Malhas quadriculadas; • Pelo menos um lado paralelo a borda do papel;	6
3. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• Fórmulas: $A = L^2$ $A = C \cdot L$ $A = B \cdot H$ $a = \frac{B.H}{2}$	• Quadrados; • Retângulos; • Triângulos; • Polígonos em geral;	• Desenhar figuras planas;	10
4. Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área;	• Desenhar figuras planas que é dado à área. • $L = \sqrt{A}$ • $L = A / C$	• Retângulo; • Quadrado; • Paralelogramo;	• Desenhar figuras planas;	6

Dez de 23 exercícios são relativos ao cálculo de área através de fórmulas. Enquanto 6 de 23 utilizam contagem e apreensão operatória. E 6 dos 23 determina a medida de um dos lados através das fórmulas de área. O que podemos concluir é que nesta série predomina o uso de fórmulas.

Estudo do livro da 7ª série

O livro da 7ª série possui 14 capítulos sendo que iremos estudar o capítulo 5: "Área de Figuras Planas". Neste livro é retomado o conceito de área de forma completa. O autor trabalha com a apreensão operatória dos alunos para a dedução de área do paralelogramo e do losango. Também é trabalhado o perímetro, e faz o aluno a determinar através da área a medida do lado de algumas figuras usuais.

Os itens deste capítulo conceituam: área do retângulo, área do quadrado, equivalência de área, área do paralelogramo, área do triângulo, área do trapézio e área de polígonos.

Neste livro é trabalhada a relação entre álgebra e geometria, para expressar perímetros e áreas de figuras planas, remetendo à reflexão e exploração de expressões equivalentes. A prova de duas expressões numéricas serem equivalentes tem que ser feita por meio de métodos algébricos, dando ênfase ao cálculo algébrico.

A abordagem dada ao teorema de Pitágoras neste livro dá ênfase à relação entre áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, tal como fizeram Euclides e Bháskara. O teorema de Pitágoras é retomado no volume 8.

Foram analisados 40 exercícios, sobre o conceito de área. Veja agora a tabela desta análise:

Tabela 6 : estudo do livro da 7ª série.

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Características	Nº de exercícios
2. Determinar a área de figuras sobre malhas;	• Contagem; • Apreensão operatória;	• Octógono	• Desenhar um quadrado em Malhas quadriculadas ;	1
3. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• Decompor as figuras; • A = L ² • A = C . L • A = B . H	• Quadrados; • Retângulos; • Triângulos; • Trapézio;	• Lados retos para a borda;	35
4. Determinar a medida de um dos lados de figuras planas, utilizando a área;	• Fórmula: L = A / H	• Retângulo; • Quadrado;	• Desenhar figuras planas;	1
5. Calcular o perímetro;	• Fórmula: P = 2C + 2L	• Retângulo;	• Desenhar figuras Planas;	1
7. Deduzir a fórmula da área de figuras planas;	• Apreensão operatória • Fórmulas: A = B. H $A = \frac{D.d}{2}$	• Paralelogramo; • Losango;	• Desenhar figuras planas;	2

35 dos 40 exercícios são relativos ao cálculo de área através de fórmula. Enquanto 1 exercício utiliza a contagem e a apreensão operatória. Portanto podemos verificar que o autor enfatiza o uso das fórmulas. Os desenhos dos exercícios é na maioria das vezes com pelo menos um lado paralelo a borda de papel.

Estudo do livro da 8ª série

No livro da 8ª série, é trabalhado o teorema de Pitágoras e o cálculo de área de círculos. Este livro está dividido em 14 capítulos sendo que iremos analisar o capítulo 2:

“cálculo da área do círculo” que TRATA sobre o Pi (o número mais famoso) e que está incluído o cálculo da área do círculo, áreas circulares e probabilidades. É apenas neste capítulo que é trabalhado com o cálculo de áreas.

Nesta coleção é trabalhada muita a área: do círculo, do semicírculo, do setor circular, coroa circular, do quadrado inscrito numa circunferência e uma circunferência circunscrita a um quadrado. As fórmulas são conceituadas, procedimentais e atitudinais. Faz cálculos aproximados de “figuras esquisitas”, contendo circunferências e quadrados.

Foram Analisados 48 exercícios sobre o conceito da área do cÍrculo.Veja a tabela desta análise:

Tabela 7: estudo do livro da 8ª série

Tarefa	Técnica	Tipos de figuras	Características	Nº de exercícios
1. Comparar áreas de circunferências	• Fórmula: A = л r^2 • Comparar medidas;	• Circunferências	• Circulares	1
2. Determinar a área de figuras planas através de fórmulas;	• $A = L^2$ • A = л r^2	• Quadrados; • Circunferência; • Semicírculo; • Setor circular; • Coroa circular;	• Circulares;	24
3. Deduzir fórmulas de área;	• A = л r^2 • $A = L^2$	• Círculos; • Quadrado; • Retângulo;	• Circulares; • Quadradas;	14
4. Verificar quantas vezes uma área cabe dentro da outra;	• Fórmula: $A = \pi r^2$	• Circunferência;	• Circulares;	1

5. Determinar o valor do raio;	• Fórmula: $R = \sqrt{A} / \pi$	• Circunferência;	• Circulo;	4
6. determinar o valor do diâmetro.	• Fórmulas: $R = \sqrt{A} / \pi$ $D = 2 . R$	• Circunferência;	• Circulo;	4

De 48 exercícios 24 determinam a área de figuras planas através de fórmulas, enquanto 14 dos 48 são de deduções de fórmulas. Com isto podemos perceber que o autor incentiva o uso de fórmulas para o cálculo de áreas. E a figura que mais se destaca é o círculo.

1.3. Conclusão

Estudamos os livros didáticos e observamos que os autores Imenes e Lellis no livro da 5ª série, a grande maioria dos exercícios utiliza o ladrilhamento, a decomposição e composição de figuras usuais e não usuais, para ensinar o conceito de área de uma forma não mecânica, mas nos livros de 6ª, 7ª e 8ª predomina a utilização de fórmulas. Nessas coleções, todas possuem um capítulo próprio sobre o conceito de área da forma como se pede nos PCN.

Já o autor José Lopes Bigode, na 5ª série não é tiliza o ladrilhamento, a composição e decomposição de figuras planas. As fórmulas são dadas e maiorias das figuras são usuais.Outro item que observamos, foi que na 6ª série não é trabalhado o conceito de área e só é retomado na 7ª e bem pouco na 8ª série. Com isto podemos concluir que o Bigode não trabalha o conceito de área de sua coleção de forma espiral.

Portanto observei que a coleção do Bigode, de 5ª à 8ª série que traz textos sobre o conceito de área, faz com que os alunos pratiquem a percepção geométrica. Trabalha pouco com o ladrilhamento e já na 5ª série, algumas fórmulas são feitas pelos alunos através da dedução. Um “erro” talvez seja do autor não trabalhar continuamente o conceito de área, ou seja, não abordar este conteúdo na 6ª série, só se retoma na 7ª série e na 8ª série. Ele toma muito cuidado na passagem do quadro geométrico para o algébrico.

CAPÍTULO III – UMA SONDAGEM.

Neste capítulo, apresentamos um estudo realizado com 20 alunos do Curso de Matemática – Habilitação em licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina. Destes 18, já atuam como professores e dois não lecionam. Este questionário tem como objetivo, verificar que estratégias os alunos estudantes de licenciatura em Matemática utilizam ao resolver problemas usando o conceito de área.

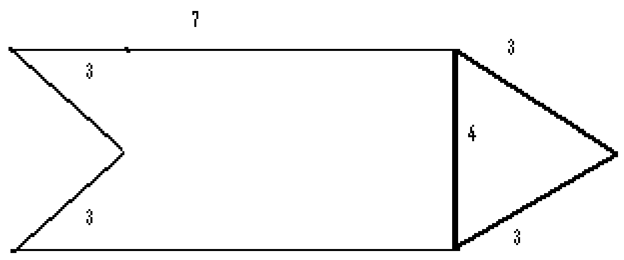
1.1. Questionário Aplicado

1. Você já é professor? (   ) Não (   ) Sim. Escola:______________________________
Série: (   ) 5ª   (   ) 6ª   (   ) 7ª   (   ) 8ª

2. Se você tivesse que dar uma aula, para uma 5ª série hoje, sobre área, como você a definiria?
____
____
____
____

3. Descreva suscintamente (passos) de uma atividade para abordar este conceito de área.
____
____
____

4. Como você explicaria para seus alunos este tipo de problema: Calcule a área.



1.2. Análise a priori

Questão 1. Você já é professor?Em que série atua? Em que escola?

Com esta questão analisamos se os alunos que responderam os exercícios já lecionam. Para conhecermos suas características. O fato de já lecionar é importante, pois os exercícios foram tirados de livros didáticos do curso fundamental.

Questão 2. Se você tivesse que dar uma aula, para uma 5 ^{a} série, hoje sobre área, como você a definiria?

Possibilidade 1: Dedução de fórmulas via atividades, utilizando o método da composição e decomposição, levando os alunos a deduzir a fórmula para o cálculo de área.

Possibilidade 2: Abordagem - tipo receita - ensinando conceito para os alunos, de forma mecanizado sem mostrar o método de composição e decomposição para os alunos, dizendo por exemplo, que a área de um triângulo é o produto da base pela altura dividido por dois, etc.

Possibilidade 3: Abordagem histórica, sendo bastante criativo a ponto de deixar bem, claro qual o conceito de área e em seguida, define área como sendo a medida da superfície partindo de sua história.

Questão 3. Descreva suscintamente passos de uma atividade para abordar este conceito de área. O objetivo desta questão é sondar o tipo de atividade que um aluno do curso de licenciatura em matemática considera que leva o aluno a elaboração do conceito de área.

Argumentos possíveis:

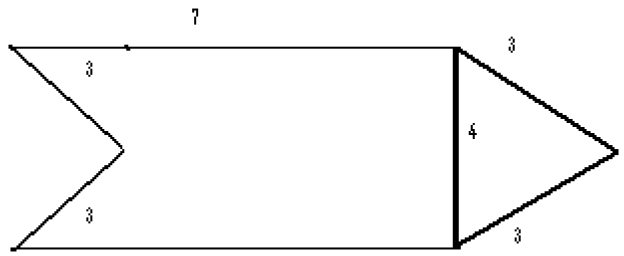
1) Se for aplicar as fórmulas no primeiro momento da aprendizagem, causará um obstáculo didático nos alunos, pois daí para frente não entenderão o significado das variáveis. Um dos entraves de se iniciar o estudo da área através da fórmula é que os alunos memorizam momentaneamente, achando até muito fácil. Quando se trata do quadrado, retângulo e triângulo, mas quando o professor fala do paralelogramo e do trapézio, os alunos confundem, pois não conseguem fazer comparações uma com a outra.

2) Deduzir a partir do ladrilhamento, da composição e da decomposição: os alunos poderão, através desse mecanismo, "manusear" figuras geométricas que não são usuais, chegando até figuras usuais, como por exemplo, retângulo. Dessa maneira eles poderão provavelmente estar preparados para o manuseio da fórmula.

3) Utilizar o Tangran, pedir para que os alunos construam, e depois usando o método da composição e decomposição pedir para calcular a área. Depois deste manuseio os alunos estariam preparados para utilizar as fórmulas.

Questão 4: Como você explicaria para seus alunos este tipo de problema:

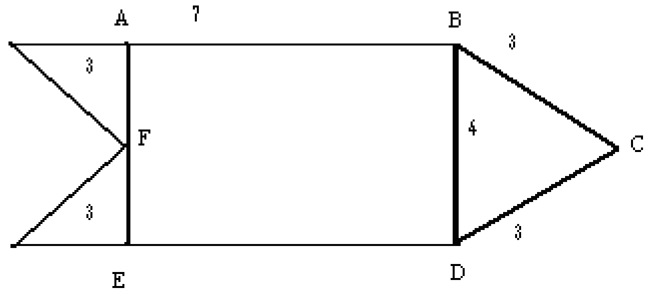
Calcule a área.



A figura é dada com suas respectivas medidas. Para começar podemos nos questionar o que significa os números marcados na figura.

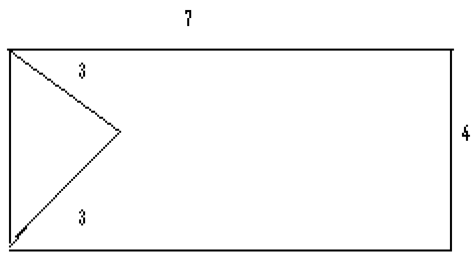
Possibilidades:

1) Utilizar a técnica da composição e decomposição. Para essa questão, se não trabalhar a composição e decomposição, a tendência será calcular a área do triângulo BCD conforme figura abaixo, logo em seguida baixar uma perpendicular ao lado do ponto F determinando o ponto E e o ponto A. Dessa forma 3 triângulos e um retângulo, constituindo a figura e ainda 2 destes triângulos serão retângulos.

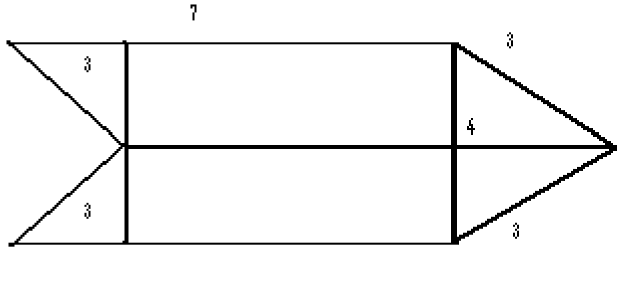


Aplicando o cálculo de área de triângulo retângulo e após somando as áreas parciais, temos assim a solução.

2) Utilizar a técnica da decomposição. Recortar o triângulo da direita e o colocaria na esquerda formando um retângulo.Isto é errôneo, pois só ter as medidas 3 nos lados não significa que o triângulo da direita encaixaria certinho na esquerda.



3) Usando a decomposição e composição: passaria uma reta pelo ponto F e formaria dois paralelogramos, depois calcularia a área de cada um ou calcularia a área de um e multiplicaria por dois e descobriria a área da figura desejada. Isto é errôneo, pois os lados da figura abaixo não formam nenhum paralelogramo.



1.3 Análise Posteriore

O Objetivo desta análise é verificar a validação de nossa análise a priore e as hipóteses de Chiummo em sua problemática.

Para os alunos que já atuam como professores de 5^a a 8^a série do Ensino Fundamental, o resultado foi variado. Dos 18 professores 5 utilizam o método tradicional, e os demais, trabalham com situações tendo por objetivo despertar a atenção dos alunos e levando-os a participar da construção do conhecimento. Dos dois alunos que não lecionam, um tem o pensamento tradicional não tendo idéia de como poderia trabalhar o conceito de área numa 5^a série. Comentou que a área é uma grandeza e depois aplicaria as fórmulas para o cálculo de área, sem fazer com que o aluno construa o conhecimento.

Os professores que têm uma postura de trabalho levando o aluno a participar da construção dos conhecimentos já iniciaram o conceito de área, através do uso das concepções espontâneas dos alunos, ou seja, trabalharam a sala de aula, o pátio da escola e o uso de lajota para a construção de uma casa.

Vamos ver as seguintes respostas de cada questão dos alunos:

QUESTÃO 1

Dos 20 alunos, 18 são professores de 5^a a 8^a séries e outros dois alunos não lecionam. Desses 18 alunos, 15 lecionam em escolas públicas e 3 lecionam em escolas particulares.

QUESTÃO 2

Veja a tabela para verificar as respostas das seguintes soluções que os alunos responderam, correspondentes a análise a priori.

Tabela 8: Questão 2 da análise a priori

Soluções	**Quantidade de alunos que lecionam**
2.1	6
2.2	3
2.3	9

Dos 18 alunos que lecionam 9 usaram a contagem de quadradinhos para o cálculo de área, e explicaram que esta atividade é trabalhada da seguinte maneira: usam o piso da sala para explicar o que é área. Temos neste caso o teorema-em-ação instituída por Baltar: *a área é o número de lajotas necessárias para recobrir uma superfície.*

Dos 18 alunos que lecionam 6 definem área como sendo uma superfície. Veja a definição de um aluno:

"... definiria que a área é a superfície de uma figura plana".

Verificamos aqui o teorema-em-ação identificada por Baltar: *a área é o espaço ocupado por uma superfície*.(falso)

A conseqüência é que este tipo de concepção sobre o cálculo de área de figuras planas poderá causar um obstáculo didático nos alunos, porque os alunos ficam restritos apenas a definição dada pelo professor.

Dos 18 alunos, 3 definem a área mostrando as fórmulas das figuras, sem utilizar nenhum método de composição e decomposição, ladrilhamentos, quadriculados, etc. Causa um grande obstáculo didático para os alunos, pois eles ficaram presos as fórmulas de figuras usuais e não saberão calcular a área de figuras não usuais, porque não têm a idéia formada do conceito de área.

QUESTÃO 3

Veja a tabela para verificar as respostas das seguintes soluções que os alunos responderam, correspondentes a análise a priori.

Tabela 9: Questão 3 da análise a priori:

Soluções	**Quantidade de alunos que lecionam**
3.1	3
3.2	14
3.3	1

Dos 18 alunos, 14 fariam uma aula para ensinar o conceito de área usando o ladrilhamento, quadriculados, composição e decomposição de figuras, fazendo com que os alunos construam o seu conhecimento do conceito de área.

Dos 18 alunos, apenas 3 utilizariam em sua aula figuras planas passando para os alunos as fórmulas, tornando os alunos incapazes de deduzir qualquer outra maneira de calcular a área.

E 1 dos 18, faria um trabalho com o Tangran e sala de aula, pediria para eles construírem o Tangran, até para verificar o surgimento das figuras e com isso deduziria as fórmulas para cada figura.

Os professores que trabalham o método da composição e decomposição de figura, o ladrilhamento, etc., faz com que o aluno construa seu próprio conhecimento, tornando capaz de calcular a área de qualquer figura plana usual ou não usual.

QUESTÃO 4

Veja a tabela para verificar as respostas das seguintes soluções que os alunos apresentaram, correspondentes a análise a priori.

Soluções	**Quantidade de alunos que lecionam**
4.1	14
4.2	2
4.3	2

Dos 18 alunos, 14 fariam a questão da maneira correta, usando a técnica da composição e decomposição formado figuras usuais, assim conseguiram fazer o cálculo da área da figura.

Já os outros responderam errado, pois utilizaram a técnica de composição e decomposição de forma errada como mostramos nas soluções 2 e 3 da questão 4 da análise a priori.

CONCLUSÃO

No presente trabalho foi feito um breve estudo histórico tendo por objetivo verificar como surgiu o conceito de área, observamos que historicamente o estudo de área era trabalhado através da resolução de problemas. Este estudo nos permite identificar que até antes do Euclides não se fazia demonstrações matemáticas. E que os matemáticos que exploraram o conceito de área de figuras utilizaram os conhecimentos passados de um historiador para o outro, como por exemplo, a matemática egípcia e a matemática babilônica. Podemos identificar o processo de evolução do conceito de área, na obra de Euclides que ele não define área, mas utiliza o método de superposição de figuras, e figuras que possuem a mesma base e a mesma paralela são "iguais", ou seja são de mesma área. Já no século XVII surgem problemas de quadraturas, havendo um confronto entre o método de Cavalieri (indivisíveis) e o método de Arquimedes (exaustão).Com conseqüência a noção de área.

Assim analisamos a pesquisa feita por Ana Chiummo onde seu trabalho está fundamentado na teoria da didática francesa.

Chiummo fez sua pesquisa voltada para os professores do Ensino Fundamental de São Paulo. Analisando como os professores do Ensino Fundamental estão ensinando para os alunos o conceito de área, se é através de fórmulas ou se é através de ladrilhamentos, composições e decomposições de figuras, contando a história do conceito de área e do perímetro, etc.

Constatou que o teorema-em-ação, identificado por Baltar que diz: *"a área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula"*.

Chiummo notou que*: "o teorema*-em-*ação, se faz presente quando os professores iniciam os conceitos de área e perímetro, utilizando a fórmula trabalhando apenas figuras usuais".*

Com isto sua fundamentação teórica e sua problemática tiveram como base a teoria de situação de Guy Brousseau (1986) e resultados de Baltar (1996).

Já obra de Lima, atualidade define e demonstra o conceito de área do quadrado, do retângulo, do triângulo, do paralelogramo e polígonos em geral. Para ele a medida das figuras tem origem na noção de grandezas incomensuráveis, portanto de números racionais.

Verificamos que os PCNs e PCSC, tem o pensamento geométrico, o objetivo da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. Para depois introduzir as deduções das fórmulas.

Analisamos que os dois planejamentos anuais trabalham sobre a proposta dos PCNS e PCSC, mas não de forma espiral. Pois na 6ª série não é visto um conteúdo próprio do conceito de área.

Estudamos os livros didáticos, e observamos que nos livro da 5ª série dos autores Imenes e Lellis, a grande maioria dos exercícios utilizam o ladrilhamento, a decomposição e composição de figuras usuais e não usuais. Para ensinar o conceito de área de uma forma não mecânica, mas nos livros de 6ª, 7ª e 8ª predomina a utilização de fórmulas. Nessas coleções, todas possuem um capítulo próprio sobre o conceito de área de forma como se pede os PCN.

Já o autor José Lopes Bigode, na 5ª série não utiliza o ladrilhamento, a composição e decomposição de figuras planas, as fórmulas são dadas e a maioria das figuras são usuais. Outro item que observamos, foi que na 6ª série não é trabalhado o conceito de área e só é retomado na 7ª e bem pouco na 8ª série. Bigode explora mais que Imenes área de círculo e semicírculo.

O questionário com os alunos da UFSC, nos deu indicativo que os alunos tem noção que devemos primeiramente ensinar o conceito de área, utilizando composições e decomposições, ladrilhamentos, para em seguida comentar com os alunos as fórmulas para o cálculo de área.

Este trabalho foi de grande importância, para mim, uma vez que pude aprofundar o meu conhecimento sobre área, como também da sua abordagem no Ensino Fundamental.

BIBLIOGRAFIA

1 - BIGODE, JOSÉ LOPES. ***"Mtemática Hoje".*** **Editora FTD, 5ª à 8ª série – Ensino Fundamental; São Paulo; 2000.**

2 - BOYER, C. B. ***"História da Matemática",*** **São Paulo: Edgard Bluche, 1974.**

3 - BALTAR, P. M. ***"Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de iácquisitin dês relations entre lês longuerurs et lês aires au collège"*** **. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble.**

4 - BROUSSEAU, Guy. ***"Les obstacles espistemologique et les problèmes em mathematiques".*** **RDM, vol. 4 n° 2, 1983.**

5 - CHIUMMO, ANA. ***"Conceito de área de figuras planas: Capacitação para professores do Ensino Fundamental".*** **Tese de mestrado – PUC/SP – 1998.**

6 - IMENES, LUIS M.; LELLIS, MARCELO. ***"Matemática para todos".*** **Editora Scipione, 5ª à 8ª - Ensino Fundamental; São Paulo; 2002.**

7 - LIMA, ELON LAGES de. ***"Medida e forma em geometria".*** **Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira De Matemática; Rio de Janeiro; 1991.**

8 - PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) – Matemática - 5ª à 8ª série; 1998.

9 - PROPOSTA CURRICULAR DE SANTA CATARINA – Educação Infantil – Ensino Fundamental e Médio; 1998.

10 - PLANEJAMENTOS ESCOLARES – Ensino Fundamental - 5ª à 8ª série.

ANEXO I

Questionário aplicado para alunos da Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.

<u>**Observação**</u>: Este questionário não é obrigado a colocar o nome. E será de grande utilidade para o Trabalho de Conclusão de curso da Acadêmica Francielle Goedert Hammes. Desde já agradeço pela sua participação.

Disciplina:______________________
Turno:_____________________
Fase do curso:_______________________

1. Você já é professor? (   ) Não (   ) Sim. Escola:______________________________
Série: (   ) 5ª   (   ) 6ª   (   ) 7ª   (   ) 8ª

2. Se você tivesse que dar uma aula, para uma 5ª série hoje, sobre área, como você definiria?
____
____
____
____
____
___
____
___

3. Descreva suscintamente (passos) de uma atividade para abordar este conceito de área.
____
____
____
____
____
____
___

4. Como você explicaria para seus alunos este tipo de problema: Calcule a área.